博弈论基础

（计算思维—周奇）

［现代博弈论开始于**1928**年冯诺伊曼的工作］

本章学习要点

- 通过几种典型博弈的类型
  - 囚徒困境，鹰鸽博弈，猎鹿博弈
- 理解博弈论的基本概念（及其引入的过程）
  - 参与人，策略，收益（收益矩阵）
  - 最佳应对，占优策略
  - 纳什均衡
  - 混合策略，混合策略均衡
  - 社会最优
- 体会“情景→博弈→求解”过程中的思想

博弈—从一个例子开始

- "复习考试"还是"准备报告"？
  - 假设在截止日期前一天，你有两件要做的事情：一是复习（为了参加考试），二是准备（给一个报告）。你只能选择做一项。
  - 考试成绩可以预计
    - 如果复习，则考试成绩92分，没复习，则80分
  - 报告需要你和你的拍档合作完成
    - 如果你和拍档都准备报告，则每人都是100分
    - 如果只有一人准备报告，则每人都是92分
    - 如果两人都没准备报告，则每人都是84分
  - 那么你该选择做什么呢？（假设你和拍档各自独立考虑这个问题）

例子：“考试–报告”博弈

- 设你们都追求平均成绩的最大化：
  - 你和搭档都准备报告，则平均成绩均为(80+100)/2 = 90分
  - 你和搭档都准备考试，则平均成绩均为：

    (92+84)/2 = 88分

- 考试成绩可以预期：
  - 如果复习，则考试成绩92分
  - 如果没复习，则考试成绩80分
- 报告是你和你的拍档合作完成的：
  - 如果你和拍档都准备报告，则每人100分
  - 如果只有一人准备报告，则每人92分
  - 如果两人都没准备报告，则每人84分

- 若一方复习考试，另一方准备报告：
  - 准备报告的得：(80+92)/2 =86分
  - 复习的得：(92＋92)/2 = 92分

收益矩阵（表达收益的一种直观方式）

		你的拍档	
		准备报告	复习考试
你	准备报告	A，B	A，B
	复习考试	A，B	A，B

- 其中第一个数字是“你”的收益，第二个是“拍档”的
- 收益（也称“回报”，payoff）

收益矩阵（表达收益的一种直观方式）

		你的拍档	
		准备报告	复习考试
你	准备报告	90, 90	86, 92
	复习考试	92, 86	88, 88

- 其中第一个数字是“你”的收益，第二个是“拍档”的
- 收益（也称“回报”，payoff）

博弈的基本要素

- 一般情况下，博弈具有三个要素：
  - （1） 参与者（至少两个）；
  - （2） 策略集：每个参与者都有一组关于如何行为的备选项，此处备选项指参与者的可能策略。
  - （3）收益（回报）： 每个策略行为的选择，都会使参与人得到一个收益。
    - 这个收益结果还受互动中他人策略选择的影响。
    - 同一组策略，不同参与人的收益可能不同

通常，收益的记号：P1(S,T)，　　P2(S,T)

博弈行为推理的几点基本假设

- 每个参与人对博弈结构（收益矩阵）有充分了解。
- 参与人都是理性的（rational）
  - 追求自己的收益最大化（尽量大）
  - 也知道其他参与人也是如此
- 决策的独立性
  - 不商量

“考试–报告”博弈中的行为推理

		你的拍档	
		准备报告	复习考试
你	准备报告	90, 90	86, 92
	复习考试	92, 86	88, 88

- 严格占优策略：对一个参与人（A）来说，若存在一个策略，无论另一个参与人（B）选择何种行为策略，该策略都是最佳选择，则这个策略就称为是A的严格占优策略。
- 这个例子中，“复习考试”对双方都是严格占优策略。

“囚徒困境”

- 假设有两个疑犯被警察抓住。并且被分开关押在不同的囚室。
- 警察强烈怀疑他们和一场抢劫案有关。但是，没有充足的证据。然而，他们都拒捕的事实也是可判刑的。
- 两个疑犯都被告知以下结果：
  - “如果你坦白，而另外一人抵赖，则你马上释放；另外一人将承担全部罪行，将会被 判刑10年
  - 如果你们都坦白，你们的罪行将被证实。但由于你们有认罪的表现——判刑4年。
  - 如果你们都不坦白，那么没有证据证明你们的抢劫罪，我们将以拒捕罪控告你们——判刑1年。
  - 另外一方也正在接受这样的审讯。你是坦白还是抵赖？”

“囚徒困境”的收益矩阵

		疑犯2	
		抵赖	坦白
疑犯1	抵赖	-1, -1	-10, 0
	坦白	0, -10	-4, -4

- 疑犯1和疑犯2的严格占优策略都是“坦白”
- 尽管如果两人都抵赖会都判得少些
  - 刻画了“有关个体私利前，建立合作是十分困难”的模型。

“兴奋剂”博弈

		运动员2	
		没服用	服用
运动员1	没服用	3, 3	1, 4
	服用	4, 1	2, 2

- 这种类型通常称为军备竞赛。竞争双方为保持彼此实力相当，都会选择生产更具危险性的武器，尽管对自己内部会有伤害
  – 运动员伤害身体，国家影响民生。

最佳应对

- 设S是参与人甲的一个策略，T是参与人乙的一个策略。在收益矩阵中的某个单元格对应这一对策略（S，T）。
  - P_1(S，T)：表示参与人甲从这组决策获得的收益
  - P_2(S，T)：表示参与人乙从这组决策获得的收益
- 最佳应对：针对参与人乙的策略T，若参与人甲采用策略S产生的收益大于或等于自己的任何其他策略，则称参与人甲的策略S是参与人乙的策略T的最佳应对。

$$P_1(S, T) \geq P_1(S', T)$$

其中， S’是参与人甲除S外的任何其他策略。

存在性？唯一性？

严格最佳应对

- 严格最佳应对：若S会产生比任何应对策略T的其他策略都更高的收益，则称参与人甲的策略S是对于参与人乙的策略T的严格最佳应对。

$$P_1（S，T）> P_1（S'，T）$$

其中，S'是参与人甲的所有其他策略。

- 注：最佳应对的概念是针对对方的某一个策略（ ），相对于自己的所有策略而言的
  - 对于同一个T，最多只可能有一个严格最佳应对
  - 对于不同的T，最佳应对可能相同，也可能不同

不一定存在，但存在则唯一

占优策略与严格占优策略

- 定义：（从最佳应对角度给出）
  - 参与人甲的占优策略S，是指该策略对于参与人乙的每一策略都是最佳应对。
  - 参与人甲的严格占优策略S，是指该占优策略对于参与人乙的每一策略都是严格最佳应对。

- 注：占优策略的概念是相对于对方所有策略而言的，而最佳应对是针对单个策略而言。
- 如果参与人有严格占优策略，则可预期他会采取该策略（与基本假设的一致性）。

并不是每人总有严格占优策略

- 例子：“营销战略”博弈
  - 假设有两家公司，分别要规划生产并销售同一种新产品。该产品有两款可能的规格：廉价（低档）或高档。如何决策？
  - 设顾客总体被分成两个市场：一部分消费群体（60%）只购买廉价商品，另一部分消费群体（40%）只购买高档次商品。
  - 假设每家公司从廉价或高档次商品所得利润是等同的（因此利润仅取决于市场占有率）。
  - 每家公司都追求利润最大化。

"营销战略"博弈

高档市场40％
廉价市场60％

- 假设
  - 若两家公司分别定位生产不同类型的产品，则每家公司都会得到该商品市场的全部份额。
  - 公司1品牌形象更佳。因此，若这两家公司在同一市场（廉价或高档次）中竞争，则公司1可以得到80%的市场，公司2只能得到20％。

		公司2	
		廉价	高档
公司1	廉价	0.48, 0.12	0.6, 0.4
	高档	0.4, 0.6	0.32, 0.08

- 可以预测此博弈的发展趋向。即公司1将会采取廉价策略，公司2将会采取高档次策略。

简单博弈的行为推理

- 如果两个人都有严格占优策略，则可以预计他们均会采取严格占优策略；
- 如果只有一个人有严格占优策略，则这个人会采取严格占优策略，而另一方会采取此策略的最佳应对（一定会有！）
- 如果两个人都没有严格占优策略呢？（从哪开始推理？）

无占优策略例子（三客户博弈）

- 假设有两家公司，都希望和A、B、C三个大客户之一洽谈生意。每家公司都有三种可能的策略：是否找客户A、B或C。
- 它们决策的考量如下：
  - 若两家公司都找同一个客户，则该客户会给每个公司一半的业务。
  - 公司1规模太小，以至于不能靠自身找到客户源。所以，只要它和公司2分别寻找不同的客户洽谈生意，则公司1获得的收益将会是0（生意做不成）。
  - 假设公司2单独寻找客户B或C洽谈生意，则会得到客户B或C的全部业务。但是A 是一个大客户。寻找客户A洽谈生意时，必须和公司1合作才能接下业务。
  - 因为A是一个大客户，和它做生意的收益是8（假设两家公司合作，则每家公司会得到收益4）。但是，和B或C做生意的收益价值是2（合作的话，每个公司收益是1）

“三客户”博弈的推理

- 收益矩阵

		公司2		
		A	B	C
	A	4, 4	0, 2	0, 2
公司1	B	0， 0	1, 1	0, 2
	C	0， 0	0, 2	1, 1

- 两家公司都没有严格占优策略

如何讨论博弈的走向（结果）？

纳什均衡

- 假定参与人甲选择策略S，参与人乙选择策略T。若S是T的最佳应对，且T也是S的最佳应对，则称策略组（S ，T）是一个纳什均衡。
  - 在均衡状态，任何参与人都没有动机（理性的理由）去换一种策略。
  - 纳什均衡可以被看成是一种信念上的均衡
    - 互为最佳应对，谁也不可能通过单方面改变策略而得到额外好处，尽管如果两人都改变可能都会更好（相比都不改变而言）

“三客户”博弈的纳什均衡

		公司2		
		A	B	C
公司1	A	4, 4	0, 2	0, 2
	B	0， 0	1, 1	0, 2
	C	0， 0	0, 2	1, 1

- 存在纳什均衡：(A， A)
- 寻找纳什均衡的两种途径：
  - 一是，检查每一个策略组，看它们中的每一项是否是彼此间策略的最佳应对策略。
  - 二是，找出每个参与人对于对方每个策略的最佳应对，然后发现互为最佳应对的策略组。

多重均衡：协调博弈

- 多重均衡——存在多个均衡
- 例子：协调博弈
  - 假设你和你拍档都为一个合作项目准备幻灯片简报（双方不能通过电话等方式联系商量）。
  - 你必须决定是用微软的PPT或是用苹果的Keynote软件来制作你负责的半份幻灯片。
  - 假设你们使用同样的软件来设计，那就比较容易合并你们的幻灯片。

协调博弈的推理

		你的拍档	
		PPT	Keynote
你	PPT	1，1	0，0
	Keynote	0，0	1，1

- 存在两个纳什均衡：（PPT，PPT），（Keynote，Keynote）。
- 如何预测协调博弈中参与人的行为？
  - 一般来说，博弈结构本身已经不能预测参与者行为的趋向，需要利用一些外部因素，例如社会习俗。

不对等协调博弈

- 假设你和项目拍档都更喜欢使用苹果软件。

		你的拍档	
		PPT	Keynote
你	PPT	1，1	0，0
	Keynote	0，0	2，2

- 谢林的聚点理论表明，可以预测参与人会倾向于收益情况更好的均衡（2, 2）。

两人的喜好不同呢

- 假设你和你的拍档喜欢的软件不同。

		你的拍档	
		PPT	Keynote
你	PPT	1, 2	0， 0
	Keynote	0， 0	2， 1

- 此时很难预测具体哪种均衡会被采取。
- 可以通过了解他们之间平常发生冲突时解决的惯例来预测。

猎鹿博弈

- 假设两猎人外出猎物。若他们合作，则可以猎到鹿（这可以给猎者带来最高的收益）。
- 猎人若分开单干，都能猎到兔。
- 若一方想单独猎鹿，则收益是0。另一方依然能猎到兔。

		猎人2	
		猎鹿	猎兔
猎人1	猎鹿	4，4	0，3
	猎兔	3，0	3，3

- 选择何种均衡？要在高收益和由于另一方不合作而造成损失之间进行权衡。

多重均衡：鹰鸽博弈

- 假设两只动物要决定一块食物的分配。
- 每只动物都可以选择争夺行为（鹰派策略）或分享行为（鸽派策略）。
  - 若两种动物都选择分享行为，它们将会均匀的分配食物，各自的收益是3。
  - 若一方行为表现为争夺，另一方行为表现是分享，则争夺方会得到大多数食物，获得收益是5，分享方只能得到收益为1。
  - 当两只动物都表现为争夺行为，由于在争夺中践踏了食物，则它们得到的收益将为0。

鹰鸽博弈的推理

		动物2	
		鸽派	鹰派
动物1	鸽派	3, 3	1， 5
	鹰派	5， 1	0， 0

- 很难预测参与者的行为
- 纳什均衡概念能有助于缩小合理的预测范围，但它并不能给出唯一的预测。

几种典型多均衡博弈类型对比

	你的拍档	
	PPT	Keynote
PPT	1，1	0，0
Keynote	0，0	2，2

	你的拍档	
	PPT	Keynote
PPT	1，2	0，0
Keynote	0，0	2，1

	猎人2	
	猎鹿	猎兔
猎鹿	4，4	0，3
猎兔	3，0	3，3

	动物2	
	鸽派	鹰派
鸽派	3，3	1，5
鹰派	5，1	0，0

简单博弈的推理（进一步）

- 如果双方都有严格占优策略，则都会采用
- 如果只有一方有严格占优策略，则可以预测另一方会采用此策略的最佳应对
- 如果不存在严格占优策略，则寻找纳什均衡
  - 存在一个纳什均衡，该均衡对应合理结果
  - 存在多个纳什均衡（需要额外信息辅助推断）
    - 协调博弈，鹰鸽博弈
  - 均衡有助于缩小考虑范围，但不保证有效预测
- 如果不存在纳什均衡，该怎么办？

一个不存在纳什均衡的例子

- 硬币配对—“零和博弈”（zero sum game）
  - 甲乙各持一枚硬币，同时选择手中硬币的正反面。
  - 若他们硬币的朝向相同，乙将赢得甲的硬币。反之，甲将赢得乙的硬币。

		参与人乙	
		正面H	反面T
参与人甲	正面H	-1，+1	+1，-1
	反面T	+1，-1	-1，+1

此时，不存在一组互为最佳应对（纯策略意义下的纳什均衡）

如果这样的博弈重复进行若干次，你会如何考虑自己的策略？

- 预测对方采用不同策略的概率，据此确定自己的策略
- 不要让对方了解自己采用不同策略的概率

此时，你的“策略”可以看成是在两种固定策略（纯策略）之间选择的概率。

混合策略的引入

- 引入随机性，考虑参与人将以一定的概率分布在不同策略间进行选择，一种分布对应一个“策略”（称为混合策略，此时，选择策略就是选择分布）
  - 对于双策略（H和T）博弈，混合策略则可简略表示为一个概率。
- 通常，我们说
  - 参与人1的策略是概率 p，是指参与人1以概率p执行H；以概率 1-p 执行T
  - 参与人2的策略是概率 q，是指参与人2以概率q执行H，以概率 1-q 执行T

作为博弈，三要素齐了没有？

- 参与人 ✔
- 策略（概率） ✔
- 收益 ？

此时的策略是在两种固定（纯）策略上选择的概率，每一组纯策略是对应有固定收益的。因而，从概率意义出发，此时的收益应该体现一种在两种纯策略上的“平均”。

回顾概率意义下平均的含义

- 两件事情H和T，如果你做H，得回报P_H，做T，得回报P_T
- 假设你以概率p选择做H，以概率1-p选择做T，你预期得到的回报是多少？

$$p \times P_H + (1 - p) \times P_T$$

就是一种“加权平均”。用概率论的术语，这也称为是“期望”（expectation）

讨论混合策略的框架（双人双策略）

- 从一个纯策略博弈出发，如下定义混合策略
- 参与人：同基础纯策略
- 参与人的策略：在各自纯策略集合上的一个概率分布
  - 于是，存在有无穷多个策略
- 某参与人在策略组（p, q）上的回报：基于在纯策略上的收益，按照自己和他人的策略概率p, q算得的收益期望
  - 不同的（p, q）导致不同的回报

立刻可能想到的(例)

		乙	
		L(q)	R(1-q)
甲	U(p)	4， 4	0， 3
	D(1-p)	3， 0	3， 3

p \ q	0.1	0.2	0.3	0.4	…
0.1	2.74, ?	?, ?	?, ?	?, ?	
0.2	?, ?	?, ?	?, ?	?, ?	
0.3	?, ?	?, ?	?, ?	?, ?	
0.4	?, ?	?, ?	?, ?	?, ?	

P1(p,q) = ?

P2(p,q) = ?

$$P_1(p,q) = p \times \boxed{P_1(U,q)} + (1-p) \times \boxed{P_1(D,q)}$$

$$P_2(p,q) = q \times P_2(p,L) + (1-q) \times P_2(p,R)$$

$$P_1(U,q) = q \times P_1(U,L) + (1-q) \times P_1(U,R)$$

$$P_1(D,q) = q \times P_1(D,L) + (1-q) \times P_1(D,R)$$

但是，在研究一个混合策略博弈的时候，我们一般并不关心在每个策略下的具体回报情况，而是关心是否能达到均衡？在什么混合策略应对下博弈达到均衡？

混合策略的均衡：互为最佳应对

- 在各自概率策略的选择下，双方的收益期望互为最大（任何单方面改变不会增加收益）
- 纳什的奠基性贡献：证明了具有有限参与者和有限纯策略集的博弈一定存在纳什均衡（包括混合策略均衡）
- 一般来说，找到混合策略的纳什均衡是很困难的，但在某些特定条件下能有系统的方法。

双人双策略、不含纯策略均衡的博弈中的混合策略纳什均衡求解

考虑硬币面向的博弈

- 你若知道对方的策略是以0.7的概率出H，你会采取什么策略？如果他的概率是0.2呢？

		他	
		正面H	反面T
你	H	-1，+1	+1，-1
	T	+1，-1	-1，+1

- 你若知道对方的策略是以0.5的概率出H，你会采取什么策略？
- 你若不知道对方的策略，你会以什么概率出H？

“0.5”策略在此有什么特别？

- 如果对方用0.5，我出什么都无所谓
- 即：我的任何策略都是它的“最佳应对”

		他	
		正面H	反面T
你	H	-1，+1	+1，-1
	T	+1，-1	-1，+1

- 反过来也一样，如果我用0.5，对方出什么（对他来说）都是一样的回报

即：（0.5,0.5）是“互为最佳应对”

由此我们可以体会到

- 一对混合策略互为最佳应对的必要条件是它们分别使得对方在两个纯策略上得到的回报无差异。

这就是我们借以求解混合策略均衡的原理——无差异原理

- 做法思路是：设一方的混合策略概率为p，写出另一方在两个纯策略上分别的收益期望，令它们相等，方程的解即为均衡策略

好的概率策略就是使对方不知道用哪个策略更好的策略

混合策略的收益

- 设参与人1采用概率p执行H，1-p执行T，则：
- 若参与人2采用H，则他的收益期望是

$$P_2(p,H)=p\times P_2(H,H)+(1-p)\times P_2(T,H)$$

- 若参与人2采用T，则他的收益期望是

$$P_2(p,T)=p\times P_2(H,T)+(1-p)\times P_2(T,T)$$

这是两个关于p的线性表达式，令它们相等，若唯一解存在且在（0.1）之间，则求得了参与人1的均衡策略

混合策略的收益计算例子

- 用收益期望来表达回报

		参与人2	
		正面H(q)	反面T(1-q)
参与人1	正面H	-1，+1	+1，-1
	反面T	+1，-1	-1，+1

- 当参与人2采用策略q时，参与人1使用不同纯策略的回报分别为：
  – 纯策略H的期望收益 ＝ (−1)(q)+(+1)(1−q) ＝ 1−2q
  – 纯策略T的期望收益 ＝ (1)(q)+(−1)(1−q) ＝ 2q−1

按照无差异原则，均衡时上述两个表达式必须相等。

硬币配对博弈的混合策略均衡

		参与人2	
		正面H(q)	反面T(1-q)
参与人1	正面H	-1，+1	+1，-1
	反面T	+1，-1	-1，+1

- 也就是：1−2q=2q−1，即q=0.5
- 对称地，可以得到参与人1的最佳应对p=0.5
- 因此，（0.5,0.5）是这个硬币配对博弈的混合策略纳什均衡（符合直觉）

到目前交作业情况

博客评估角度：立意、深度、逻辑

序号	学号	姓名	院系	专业	作业1	作业2	作业3	作业4	博客1
1	2008200129	王洋	财政金融学院	金融学					
2	2009201768	董宝忠	商学院	贸易经济	1	1	1	1	
3	2009201957	黄笑笑	统计学院	统计学	1				
4	2009201971	柳洋	统计学院	统计学	1	1	1	1	1
5	2009201987	王伟	统计学院	统计学	1	1	1	1	
6	2009202558	于翔	信息学院	理科实验班（信息与数学）				1	1
7	2009290082	边贤浩	经济学院	国际经济与贸易专业（普通班）					
8	2009290183	杰珂琳	文学院	汉语言			1	1	1
9	2010200136	徐沐阳	财政金融学院	金融学	1	1	1	1	
10	2010200280	曲嘉欣	财政金融学院	金融学					未发
11	2010201633	张寒露	商学院	工商管理类		1		1	
12	2010201647	张恒滔	商学院	工商管理类	1	1	1	1	1(提前)
13	2010201863	唐瑜	社会与人口学院	社会学	1	1	1	1	
14	2010202422	邓捷	信息学院	理科实验班（信息与数学）	1	1	1	1	
15	2010202665	陈杰	信息资源管理学院	政务信息管理					1
16	2010290260	李在俊	社会与人口学院	共事业管理（公共政策与人口管理方向）	1				1
17	2011200929	喻婷	经济学院	国际经济与贸易专业（普通班）					未发
18	2011201472	唐小薇	农业与农村发展学院	农业经济管理类	1	1	1	1	1
19	2011201612	聂昊	商学院	工商管理	1	1	1	1	
20	2011202145	冯海敏	文学院	中国语言文学类	1	1	1	1	
21	2011202258	刘丫	新闻学院	广播电视新闻学	1	1	1	1	1
22	2011202330	尹航	新闻学院	新闻学	1	1	1	1	
23	2011202344	郑馨怡	新闻学院	广告学	1	1	1	1	
24	2011202391	程迪	信息学院	理科实验班（信息与数学）					未发
25	2011202505	王怡	信息学院	理科实验班（信息与数学）	1	1	1	1	
26	2011290200	金宇彬	商学院	工商管理类					未发
27	2011290202	金智焕	商学院	工商管理类					
28	2011290210	南鹤吉	商学院	工商管理类					

用博弈论思想分析问题

情景描述 → 收益矩阵 → 博弈求解

- 理解不同博弈的类型，以及求解的方法重要。均衡是一个基本目标。
- 将问题（情景）准确抽象成收益矩阵至少同样重要。（参与人，策略，收益回报）

混合策略：进一步的例子

- 持球–抛球博弈
  - 橄榄球赛：进攻方可以选择持球或者是抛球。防御方可以选择拦断持球或者选择防守抛球。
  - 若正确阻止了进攻方的行为，则进攻方的收益为0。
  - 假设进攻方选择持球而防守方却选择防守抛球行为，则进攻方的收益为5（防守方相应损失）。
  - 假设进攻方选择抛球，同时防守方却选择拦断持球，则进攻方的收益是10（防守方相应损失）。

		防守方	
		防守抛球	拦断持球
进攻方	抛球	0，0	10，-10
	持球	5，-5	0，0

持球抛球博弈的混合策略均衡

- 这是一个没有纯策略纳什均衡的博弈（检查）
- 设防守方选择防守抛球的概率为q

		防守方	
		防守抛球(q)	拦断持球(1-q)
进攻方	抛球	0，0	10，-10
	持球	5，-5	0，0

- 进攻方选择抛球的期望收益：0*q＋10(1−q)
- 进攻方选择持球的期望收益：5q＋0*q
- 依无差异原理，令 10−10q=5q，解得 q=2/3

持球抛球混合策略均衡（续）

- 设进攻方选择抛球的概率为p

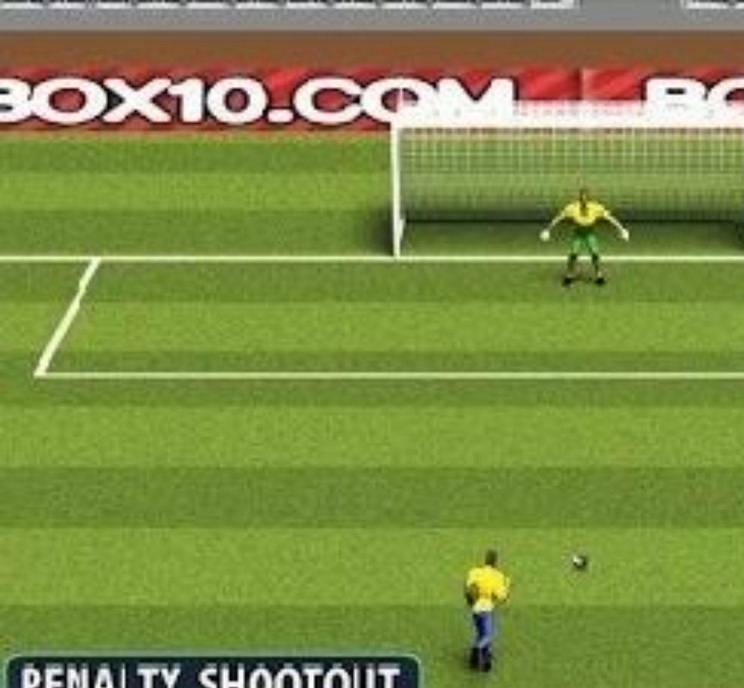
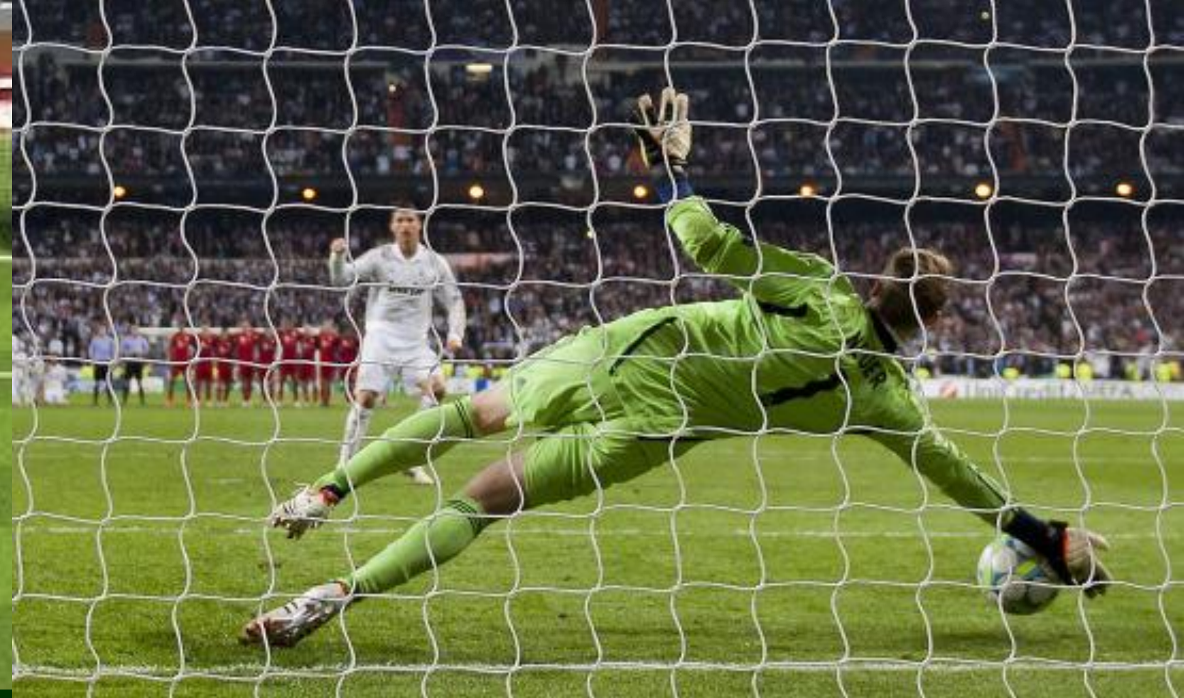
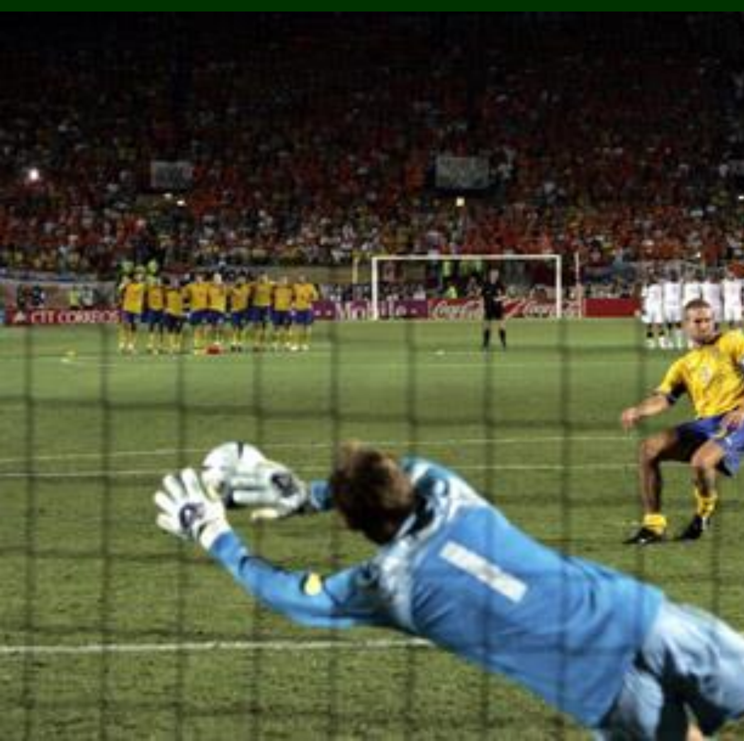
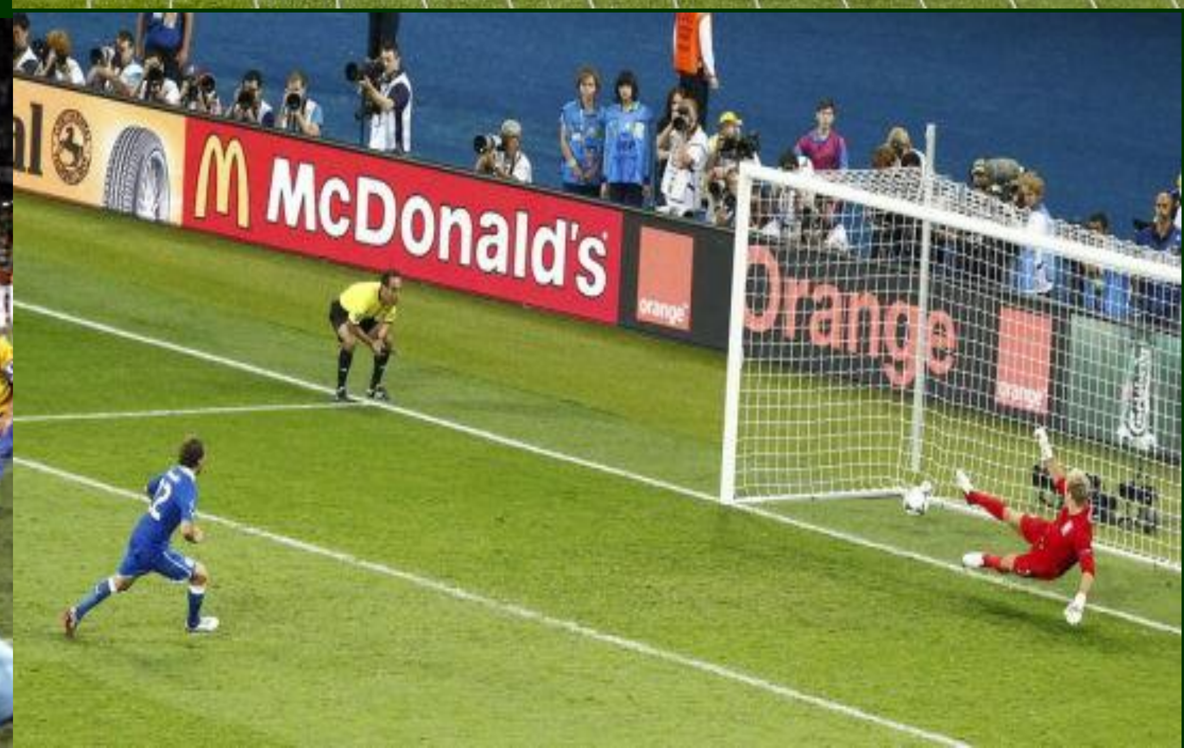
		防守方	
		防守抛球	拦断持球
进攻方	抛球(p)	0，0	10，-10
	持球(1-p)	5，-5	0，0

- 防守方选择防守抛球的期望收益：$-5(1-p)$
- 防守方选择拦断持球的期望收益：$-10p$
- 令 $-10p=-5(1-p)$，解得 $p=1/3$
- 于是，这个博弈的混合策略均衡为(1/3,2/3)

讨论

		防守方	
		防守抛球(2/3)	拦断持球(1/3)
进攻方	抛球(1/3)	0，0	10，-10
	持球(2/3)	5，-5	0，0

- 为什么抛球有可能收益更大，而均衡中进攻方选择抛球的概率只有1/3？
  – 由于防守方高概率防守抛球，若抛球概率p>1/3，则损失会比较大
- 为什么进攻方的抛球概率只有p=1/3，但防守方还要更多的防守抛球？
  – 由于抛球对进攻方更有利，需要加大防守力度


BOX10.COM
PENALTY SHOOTOUT



McDonald's
Orange
orange

假设你得到了

	射手		守门员		得分
	L	R	L	R	
1	*		*		1
2	*			*	0
3		*	*		1
4		*		*	1
…	…	…	…	…	…
1000	*		*		0

- 1000次点球的如下数据
  - 射手是射向左还是右
  - 守门员是扑向左还是右
  - 每次点球得分与否

（忽略中间的情况）

- 你可做什么研究（从数据中得到结论）？

进球%，射向左边（右边）进球%，射门方向与扑球方向一致（不一致）的%，在射门与扑球方向一致（不一致）情况下进球%，…

例子：罚点球博弈

- 2002年，有人做了一项有关罚点球研究
  - 射手要决定从球门的左侧或是右侧进球。
  - 守门员则要决定是扑向左侧或是右侧拦断进球。
  - 两人需要同时做选择。

		守门员	
		L	R
射球方	L	0.58，-0.58	0.95，-0.95
	R	0.93，-0.93	0.70，-0.70

统计数据。可以看到，射球方总是有赢头（符合实际）。

发点球博弈的混合策略均衡

		守门员	
		L(q)	R
射球方	L(p)	0.58，-0.58	0.95，-0.95
	R	0.93，-0.93	0.70，-0.70

- 计算得到的均衡：

  $0.58q+0.95(1-q)=0.93q+0.70(1-q)$， $q=0.42$

  $-0.58p-0.93(1-p)=-0.95p-0.70(1-p)$， $p=0.39$

- 实战统计得到的数据：$q=0.42$， $p=0.40$
  - 对应前面的示意数据表中的什么数据？

兼具纯策略和混合策略均衡的博弈

- 例子：不平衡的协调博弈

均衡为什么出现在以较大的概率选择收益较低的策略？

		你的拍档	
		PPT(q)	Keynote
你	PPT(p)	1，1	0，0
	Keynote	0，0	2，2

- 除了两个纯策略均衡（PPT, PPT）和（Keynote, Keynote）外，还存在一个混合策略均衡：$q=2(1-q)$，$q=2/3$；$p=2(1-p)$，$p=2/3$

考试—报告博弈没有混合策略均衡

		你的拍档	
		准备报告	复习考试
你	准备报告	90, 90	86, 92
	复习考试	92, 86	88, 88

- P1 (1, q)=q*90+(1−q)*86;
- P1 (0, q)=q*92+(1−q)*88;
- 容易检查，不存在q，使 P1(1,q) = P1(0,q)

双人双策略博弈均衡的一般求法

- 看是否存在纯策略均衡
  - 分别检查4个纯策略组，看其中的策略是否互为最佳应对，若是，就得到纯策略纳什均衡（可能多个）
- 看是否存在混合策略均衡
  - 设参与人2采用混合策略q，利用无差异原理，分别写出参与人1采用两个纯策略的收益期望，令它们相等，试求q
  - 设参与人1采用混合策略p，利用无差异原理，分别写出参与人2采用两个纯策略的收益期望，令它们相等，试求p
  - 若求得 $0< p, q <1$，就得到混合策略纳什均衡
  - （最多一个）

社会最优

- 一组策略选择是社会最优的（或社会福利最大化），若它使参与者的回报之和（总收益）最大。

		你的拍档	
		准备报告	复习考试
你	准备报告	90, 90	86, 92
	复习考试	92, 86	88, 88

- （报告，报告）是社会最优。

社会最优和纳什均衡有可能一致

- 按照下面的收益矩阵，（报告，报告）既是社会最优也是纳什均衡

		你的拍档	
		准备报告	复习考试
你	准备报告	98, 98	94, 96
	复习考试	96, 94	92, 92

均衡与社会最优一致的系统是理想系统

用博弈论思想分析问题

情景描述 → 参与人策略收益 → 博弈求解

- 理解不同博弈的类型，以及求解的方法重要。均衡是一个基本目标。
- 将问题（情景）要求准确抽象成收益矩阵至少同样重要。

作业：练习6.2

- 思考下列陈述：
- 在二人博弈的纳什均衡中，每个参与人都选择了一个最优策略，所以两个参与人的策略组是社会最优。
- 这个陈述是否正确？假设你认为是正确的，请给出简要说明来解释为什么正确。假设你认为不正确的，请举出一个第6章讨论过的博弈例子来说明它是错误的（你不需要写出有关博弈的具体细节，仅提供你认为能清楚表达你的意思的内容），附加上简要解释。

作业：练习6.10

	L	R
U	3，3	1，2
D	2，1	3，0

- 上面的收益矩阵中，行代表参与人A的策略选择。列代表参与人B的策略。每个单元格的第一个数代表着参与人A的收益，第二个数代表着参与人B的收益。
- （a）找出该博弈的所有纯策略纳什均衡。
- （b）注意到上面的收益矩阵中，参与人A对应策略组（U，L）的收益是3。你可以用一个非负数改变这个数字，使改变后的博弈中没有纯策略纳什均衡吗？请加以简要解释。
- （c）现在，返回（a）部分的初始收益矩阵中，并对参与人B的情况进行类似的考察。也就是问：在初始收益矩阵中，能否改变B在策略组（U,L）情况下对应的回报（即用一个非负数替换B的那个3），使得结果博弈中不存在纯策略纳什均衡？请加以简要解释。