牛顿、莱布尼兹与微积分

17 世纪是一个创作丰富的时期，而最辉煌的成就是微积分的发明。它的出现是整个数学史也是整个人类历史的一件大事。它从生产技术和理论科学的需要中产生，同时又回过头来深刻地影响着生产技术和自然科学的发展。

一、牛顿简介

牛顿（Newton,1643.1.4－1727.3.31），英国著名的数学家、物理学家、天文学家、自然哲学家。1643 年 1 月日 4 牛顿生于英国林肯郡的沃尔索普（Woolsthorpe）村，牛顿是遗腹子，而且早产，生后勉强存活。父亲是一个农民，在牛顿出生前就去世了。牛顿 3 岁时母亲改嫁。大约 5 岁入小学， 1655 年入格兰瑟姆中学读书。少年的牛顿不是神童。在校成绩并不突出，但他喜欢读书，自中学起就有作读书笔记的习惯。中学时代的牛顿在做机械模型和实验上显示了他的爱好和才能。14 岁时，由于生活所迫，牛顿停学务农，以后在舅父的帮助下又入学读书。1661 年，牛顿以优异成绩考入剑桥大学的三一学院。1664－1665 年初，他在毕业前夕发现了关于任意次幂的二项展开定理（二项式定理），这是他数学生涯中第一个创造性成果。同年获文学学士学位，并当了研究生。但不久便由于在伦敦流行鼠疫，牛顿只好回农村居住。在沃尔索普村的 18 个月里，牛顿发明了微积分，提出了万有引力定律，还研究了光的性质，用三棱镜实验光的色散现象，提出了物理学中的著名的光谱分析。这是牛顿一生的三大发明，都成为科学史上的重大成就。后来，他在追忆这段峥嵘的青春岁月时说：“当年我正值发明创造能力最强的年华，比以后任何时候更专心致志于数学和哲学（科学）。”我们特别注意到，他于 1666 年 10 月写成的《流数简论》，是世界上第一篇微积分论文，它标志着这一学科的诞生。1667 年瘟疫过去，牛顿又回到剑桥大学。1668 年发明并亲手制作了第一具反射望远镜。由于他在科学上的出色成就，他的老师巴罗于 1669 年 10 月主动把数学教授的职位让给他，于是牛顿开始了他三十年的大学教授生活。他在 1669 年写成了《运用无穷多项方程的分析学》（1711 年发表），又于 1671 年写成《流数法和无穷级数》（1736 年发表）。这两篇论文同《流数简论》一起奠定了微积分的理论基础。1685 年，他开始撰写《自然哲学的数学原理》，在哲学上深信物质、运动、空间、和时间的客观存在性，坚持用观察和实验的方法发现自然界的规律，力求用数学定量方法表述的定律说明自然现象，其科学研究方法支配后世近 300 年的物理学研究。1687 年，这部伟大著作刚刚写完，便由哈雷（E.Halley，1656－1742）出资发表，立即对整个欧洲产生了巨大影响。著名的牛顿力学三定律、万有引力及牛顿的微积分成果都载于此书。它成为科学史上的一个里程碑。

由于长期的紧张工作及母亲病逝的精神打击，牛顿得了精神衰竭症。1693 年，牛顿写成他的最后一部微积分专著《曲线求积术》，这也是牛顿最成熟的微积分著作。1696 年，牛顿被任命为造币厂督办，三年后当了厂长。

1665 年到 1696 年，牛顿纯粹是一个科学家，为科学事业做出了许多卓越贡献。1703 年，1703 年他当选为皇家学会会员。1705 年被女皇封为爵士，得到了一生的最高荣誉。但他的研究重心却逐渐转移到神学，晚年写了大量关于神学的文字。1727 年 3 月 31 日，牛顿病逝于英国的肯辛顿。牛顿终身未娶。

二、牛顿的微积分

牛顿的数学研究涉及到数论、高次代数方程、解析几何学、数值分析、概率论、曲线分类、变分法等问题。其最突出贡献是他独立地创立了微积分，这方面的工作主要体现在他的三部著作之中：

1．《流数简论》

牛顿微积分的起源是运动学，牛顿在《流数简论》中借助于运动学中描述的连续量及其变化率阐述他的流数理论。1666 年，他在坐标系中通过速度分量来研究切线，促使了流数的产生，又提供了它的几何应用的关键。牛顿把曲线 f(x,y)=0 看作沿 x 轴与 y 轴运动的点 A 和 B，他把点 A，B 随时间变化的“流动速度”称作“流数”。牛顿创立了用字母上加一点的符号表示流动变化率。

《流数简论》中，牛顿还由计算流数之比的基本法则导出函数的积和商的微分法则。至于函数和的微分，牛顿认为是显然的，没有作为公式列出。

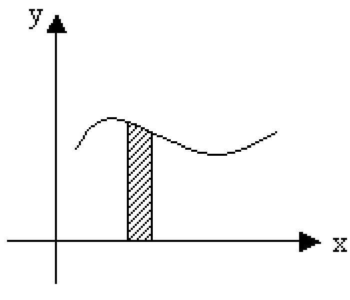
由于牛顿首次引入 “流数”和“变化率”的概念，明确提出一般性的微积分算法，特别是提出微积分基本定理，所以说他“发明了微积分。不过，他当时只是观察到这一重要定理，至于定理的证明则是在他的第二本微积分著作中出现的。

2.《运用无穷多项方程的分析学》(以下简称《分析学》)

1696 年，牛顿在他所著的小册子《运用无穷多项方程的分析学》中不仅给出了求变化率的普遍方法，而且证明了微积分基本定理，从计算角度来说，他实际上给出了两个基本的求导和积分公式，用现代符号表示为 ，$\left(ax^m\right)' = \max^{m-1}; \int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$。牛顿还给出了函数之和的积分等于各函数的积分的和的法则，在此基础上给出了无穷级数进行这项积分的方法，他已意识到级数收敛和发散的区别，没有提出收敛的概念。例如：已知如图一条曲线 y，曲线下的面积为 z 且 $z = ax^m$ 。 (1)

x 变化，得到无穷小量“o”，牛顿称为“瞬”，则 z 的增量为：

$$z+oy = a(x+o)^m = a(x^m + mox^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} o^2 x^{m-2} + \ \ldots\ + o^m) \qquad (2)$$



(2)－(1) 得:

$$oy = a(mox^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} o^2x^{m-2} + \ \ldots\ + o^m)$$

(3)

(3) 除以无穷小量 o，得

$$y=a(mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}ox^{m-2}+\cdots+o^{m-1}) \qquad (4)$$

在（4）中舍去含有无穷小增量 o 的项，得：

$$y=amx^{m-1} \qquad (5)$$

(5)式说明，面积在 x 点的变化率是曲线在 x 处的 y 的值，反之，如果曲线是 $y=amx^{m-1}$，那么，在它下面的面积 $z=ax^m$。这也说明求面积与求它的变化率的过程是可逆的。这是微积分的基本定理。

到此为止，牛顿已经建立起比较系统的微积分理论及算法。不过他在概念上仍有不清楚的地方。在无穷小方法中包含着矛盾。因为从上述牛顿的推导过程看，把 x 变成 x+o，因而

ax^m变成了$a(x+o)^m$,按着应用二次定理展开，再用 o 除两边，这只有假定 o 不为零时，（3）式才能变成（4）式，而由（4）到（5），o 又应为零，这就产生了矛盾。早在 1649 年，荷兰数学家纽文蒂就对无穷小量的应用提出了指责，1734 年英国大主教贝克莱在其《分析学家》一书中对牛顿的微积分进行了强烈的攻击。由此导致了第二次数学危机。史称"贝克莱悖论"。这主要在于：

第一，他的无穷小增量 o 是不是 0？牛顿认为不是。既然这样，运算中为什么可以略去含 o 的项呢？牛顿没有给出合乎逻辑的论证。第二，牛顿虽然提出变化率的概念，但没有提出一个普遍适用的定义，只是把它想象成"流动的"速度。牛顿自己也认为，他的工作是建立在有效的计算方法上，而不是澄清概念，他对这些方法仅仅作了"简略的说明而不是准确的论证。"牛顿的态度是实事求是的。尽管如此，牛顿本人当时也无法克服无穷小量的辩证法与数学方法的形式特征的矛盾。这主要是由于基础的概念的含糊不清而导致的矛盾所致。这使数学家为清除贝克莱悖论面展开工作，从而产生了柯西—魏尔斯特拉斯的微积分理论的奠基时代。

3.《流数法和无穷级数》（1671 年完成，1736 年出版，简称《流数法》）

这是一部内容广泛的微积分专著，是牛顿在数学方面的代表作。在前两部书的基础上，牛顿提出了更加完整的理论。

从书中可以看出，牛顿的流数概念已发展到成熟的阶段。他把随时间变化的量，即以时间为自变量的函数称为流量，用字母表的后几个字母 v，x，y，z 来表示；把流量的变化速度，即变化率称为流数，用表示流量的字母上加点的方法来表示，如$\dot{x}$，$\dot{y}$，以前用的瞬的概念仍然保留，并且仍用 o 表示。牛顿在书中引入强有力的代换积分法（采用现代符号）：

设 u=φ（x）则，$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(u)du$　　　（1）

至此，牛顿已建立起比较完整的微分和积分算法，他当时统称为流数法，他充分认识到这种方法的意义，说流数法（即微积分）是一种"普遍方法"，它"不仅可以用来画出任何曲线的切线……而且可以用来解决其他关于曲度、面积、曲线的长度、重心的各种深奥的问题"。《流数法》一书便充分体现了微积分的用途。

牛顿被誉为科学的巨人。纵观牛顿的一生，他在科学上的最重要的成就有三个：发明微积分、建立经典力学体系、提出光的性质的理论。其中任何一项成就都足以使他列入世界上的大科学家行列。但牛顿总是谦逊地将自己的科学发现归功于前人的启导。牛顿有名言"如果我看得更远些，那是因为我站在巨人的肩膀上"（1676 年 2 月 5 日致胡克的信）牛顿并不认为自己发现了真理的海洋，他在逝世前不久给朋友写的信中说："我不知道世人怎样看待我，但我自己觉得，我不过是在一个海滨玩耍的小孩，为时而拾到一片比寻常更为莹洁的卵石，或更为美丽的贝壳而雀跃欢欣，而在我面前，却仍然是一片浩瀚未知的真理的海洋。"

在牛顿的全部科学贡献中，数学成就占有突出的地位，这不仅是因为这些成就开拓了崭新的近代数学，而且还因为牛顿正是依靠他所创立的数学方法实现了自然科学的一次巨大综合而开拓了近代数学。

三、莱布尼兹简介

莱布尼兹是德国著名的哲学家、数学家、自然科学家。1646 年 7 月 1 日，生于莱比锡（Leipzip），出身书香门弟，父亲是莱比锡大学的哲学教授，耳濡目染，使莱布尼兹从小就十分好学。莱布尼兹六岁时父亲便去世了，留给他的是十分丰富的藏书，为他早年的博学多识创造了良好的条件。

1661 年，莱布尼兹进入　莱比锡大学学习哲学、修辞学、数学及多种语言，后又研究法律。广泛阅读了 F.培根(Bacon)、J.开卜勒(Kepler)、G.伽利略(Galileo)等人的著作。1663 年

获学士学位，同年转入耶拿（Jena）大学。他在耶拿大学一边学哲学，一边在魏格尔（E·Weigel）指导下系统学习了欧氏几何。1664 年，他获得哲学硕士学位，三年后又获得法学博士学位。1669 年开始思考自然哲学问题。1672 年，莱布尼兹作为外交官出使巴黎，结识了许多科学家，包括从荷兰去的惠更斯（C・Huygens，1629~1695）。在惠更斯等人的影响下，他对自然科学特别是数学产生了浓厚的兴趣，真正开始了他的学术生涯。1673 初，他又出使伦敦，结识了胡克（R・Hooke，1635~1703），波义尔（R・Boyle，1627~1691）等人，3 月回到巴黎，4 月即被推荐为英国皇家学会的外籍会员。莱布尼兹滞留巴黎的四年时间，是他在数学方面的发明创造的黄金时代。在这期间，他研究了费马、帕斯卡、笛卡儿和巴罗等人的数学著作，写了大约 100 页的《数学笔记》。这些笔记虽不系统，且没有公开发表，但其中却包含着莱布尼兹的微积分思想、方法和符号，是他发明微积分的标志。

1676 年，莱布尼兹返回到德国，同年出任汉诺威公爵顾问及图书馆馆长，后一直在那里任过多种官职。1682 年他与门克（O・Mencke，？~1707）创办了拉丁文杂志《博学学报》（Acta Eruditorum）。1684 年，他在该杂志上首次发表了微积分论文，《对有理量和无理量都适用的，求极大值和极小值以及切线的新方法，一种值得注意的演算》（下简称《新方法》），这是他在微积分方面的代表作。

除了数学外，莱布尼兹的研究涉及逻辑学、数学、力学、地质学、法学、物理学、生物学、历史学、哲学、语言学、神学等诸多领域，并做出了卓越贡献。因而他被誉为“百科全书式的”人物。他在数理逻辑和形式逻辑方面开创了新局面，他还于 1673 年发明了能作四则运算的手摇计算机。他系统地阐述了二进制记数法，并把它与中国的八卦联系起来。莱布尼兹在无穷级数方面，利用格雷戈里的展开式于 1674 年得到著名的公式：$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$，等等。此外，他在哲学上反对牛顿的绝对时空观，倡导客观唯心主义单子论，在逻辑学上提出数理逻辑的许多基本概念与命题。

从 17 世纪九十年代起，莱布尼兹就热心从事于科学院的筹划和建设，1700 年，他终于促成柏林科学院成立，并出任第一任院长。同年被选为法国科学院的外籍院士。1713 年，维也纳皇帝授予他帝国顾问职位，并封他为男爵，邀请他指导建立科学院。他还建议成立彼得堡科学院，这些建设都被采纳了。他的科学远见和组织才能，有力地推动了欧洲科学的发展。他甚至写信给中国的康熙皇帝，建议成立科学院。

莱布尼兹是受中国学术界重视的人物。他是第一位全面认识东方文化尤其是中国文化的西方学者，为中东西方科学文化的传播与交流作出了自己的贡献。他强调，中国与欧洲位于世界大陆东西两端，都是人类伟大灿烂文明的集中地，应该在文化、科学方面互相学习平等交流。

莱布尼兹一生没有结婚。1716 年 11 月 14 日，莱布尼兹平静地离开了人世，享年 70 岁。

四、莱布尼兹的微积分

莱布尼兹在数学的最突出贡献是他独立地创立了微积分，这方面的工作主要体现在他的两部著作之中：

1.《数学笔记》

从莱布尼兹的《数学笔记》可以看出，他的微积分思想来源于对和、差可逆性的研究。他开始采用 dx 表示两个相邻 x 的值的差，用 dy 表示相邻 y 值的差，即曲线上相邻两点的纵坐标之差，莱布尼兹称其为“微差”，从此，他一直采用符号 $\int$ 和 dx，dy 来表示积分与微分。由于这些符号十分简明，逐渐流行于世界，沿用至今。

1676-1677 年的数学笔记中还提出一系列的微积分法则。

综上所述，莱布尼兹在发现微积分基本定理的基础上，建立起一套相当系统的微分和积分方法。他成为与牛顿同时代的另一微积分发明者。当然，他们的成果都是独立取得的，当他们开始联系时，已经各自建立起一套具有特色的微积分理论了。

2.《新方法》

这是莱布尼兹公开发表的第一篇微积分论文，是对他的微分成果的概括。

莱布尼兹在论文中对微分给出与现今一致的导数定义。莱布尼兹还给出微分法则 $d(x^n)=nx^{n-1}dx$ 的证明及函数的和、差、积，商的微分法则的证明。莱布尼兹十分注意微分法的应用，他在文章中讨论了用微分法求切线、求极大值、极小值以及求拐点的方法。

莱布尼兹充分认识到微分法的威力，他说：这种方法“可以用来解决一些最困难的、最奇妙的数学问题，如果没有我们的微分学或者类似的方法，这些问题处理起来决不会这样容易。”

1686 年，莱布尼兹又在《博学学报》上发表了一篇题为“论一种深刻的几何学与不可分元分析”的论文，它与《新方法》是姊妹篇，前者以讨论微分为主而本文以讨论积分为主。文中的积分号 $\int$ 是在出版物中首次出现。1686 年以后，莱布尼兹继续研究微积分。在求曲线曲率，曲线族包络、判断级数收敛和求解微分方程方面都取得出色成果。

五、莱布尼兹与牛顿微积分的工作比较

在创立微积分方面，莱布尼兹与牛顿功绩相当。这两位数学家在微积分学领域中的卓著贡献概括起来，他们的主要贡献是：总结出处理各种有关问题的一般方法，认识到求积问题是与切线问题互逆特征，并揭示出微分学与积分学之间的本质联系，从而提出微积分学的基本定理；建立了能极大地促进微积分学发展的符号体系。总之，他们创立了作为一门独立学科的微积分学。

对二人工作的比较，其共同点是：他们各自独立地发现了微积分基本定理，并建立起一套有效的微分和积分算法；他们都把微积分作为一种适用于一般函数的普遍方法；都把微积分从几何形式中解脱出来，采用了代数方法和记号，从而扩展了它的应用范围；都是把面积、体积及以前作为和来处理的问题归结到微积分。这样，四个主要问题——速度、切线、极值、求和，便全部归结为微分和积分。另外，二人的微积分基础也是一样的，都是无穷小量。不管是 $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$，还是 $\frac{dy}{dx}$，都是两个无穷小量之商，而曲线下的面积则被看作一组面积为无穷小的矩形之和。

然而，这两个人的工作也是存在着差异的，主要表现在以下几个方面：

第一，研究方法论的角度不同，牛顿作为物理学家，往往致力于能推广为一般方法的具体结果；莱布尼兹作为哲学家，则更多地关心能应用于特殊问题的一般方法。

第二，理论基础不同。牛顿以连续运动为出发点，因而具有比较明显的极限概念，莱布尼兹则以离散的无穷小为出发点，因而极限观念不甚鲜明。

第三，研究的侧重点不同。就微分学而言，牛顿以研究变量的各自独立的流数，通过考察时间的无穷小瞬来求变量的流数及其关系，以变化率即导数的概念作为他的学说的核心，莱布尼兹则以微分为基本点，把独立的微分 dx 和 dy 作为基本概念，并以微分法为中心内容，面积与体积被设想成无穷多个微分之和。就积分学而言，牛顿强调变化率问题的反问题即不定积分，莱布尼兹强调微分的无穷和即定积分。

第四，表达的方式不同。牛顿把无穷级数看成微积分学不可缺少的工具；莱布尼兹更多地倾向于求有限形式的解，以实现微积分的解析式。莱布尼兹创建了巧妙的符号系统，建立微积分的方式法则体系，牛顿似乎对此兴趣不大，他不注重发现法则，而是把主要精力放在

完善学说和扩大应用上。

第五，反映的哲学观不同。牛顿的工作重严谨，推理谨慎；莱布尼兹则比较大胆。这反映了二人不同的哲学属性。牛顿属于“英国经验主义者”，而莱布尼兹的微分概念及其算法程序表现了逻辑发展的必然趋势。

最后，就创造与发表的年代看，牛顿创造微积分基本原理比莱布尼兹更早。前者奠基于1665－1667 年，后者则是 1672－1676 年，但莱布尼兹比牛顿先于发表。故发明微积分的荣誉应属于他们二人。

当然，牛顿与莱布尼兹的微积分都缺乏清晰的、严谨的逻辑基础，这在初创时期是不可避免的。直到 19 世纪，微积分学的逻辑基础才得以奠定。

有充分证据判明，这两位数学家的工作是相互独立的。而且，从我们前面所作的比较可以看出，他们两人在微积分领域的工作可称得上是相辅相成，珠联璧合。尽管如此，通过前述关于他们二人的工作比较，也各有特色。牛顿注重物理方面，而莱布尼兹则侧重于几何方面，并与他的“单子”概念有联系，有一定的哲学色彩；牛顿的工作方式是经验的、具体的和谨慎的，在符号方面不甚用心，而莱布尼兹则是富于想象的和大胆的，力图运用符号建立一般的法则，善于把具体结果加以推广和普遍化。今天我们知道，尽管莱布尼茨可能从与牛顿的通讯中得到某些启发，但是他是从不同的思路独立发明微积分的，而且由于莱布尼茨对微积分表述得更清楚，采用的符号系统更直观、合理，被普遍采纳沿用至今。