

# 费马、笛卡儿与解析几何

## 一、平面解析几何的创立

解析几何是数学中最基本的分支学科之一，也是科学技术中最基本的数学工具之一。从历史的角度看，解析几何的创建可以说是数学史上最大的创造之一。它无疑是17世纪数学观和方法论出现重大变革的直接结果，它的产生是常量数学向变量数学的转折点——在此基础上建立微积分，数学进入了更高的发展的阶段，解析几何这种解析作用也体现在后人对数学的认识中：在现代数学教学中，解析几何学科是学习高等数学的基础，因而，它的一部分构成中学的解析几何课程；另一部分构成大学数学基础课的内容。

## 二、“业余数学家之王”——17世纪数学天才费马

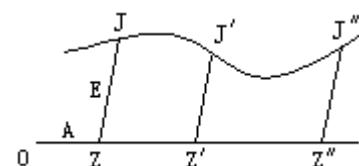
费马（P.de fermat, 1601—1665）法国数学家，生于法国南部图卢兹，皮革商人家庭出身。他的童年和少年是在波蒙特度过的，在家乡上完中学后，入图卢兹大学专攻法律，毕业后任律师，曾任图卢兹议会的议员，并享有长袍贵族的特权。他博闻饱学，精通数种文字，掌握各种自然科学知识，在30岁以后才开始利用业余时间进行数学研究，由于他精通法语、西班牙语、拉丁语、希腊语等，从而使他不仅能精心研究韦达的著作，而且能深入钻研那些古典的数学著作。例如阿基米德、阿波罗尼奥斯、丢番图、帕普斯等人的作品。他不愧是一位数学天才，数学工作仅占据了他的一部分时间，却取得了丰硕的成果。费马是解析几何的创立者；17世纪的数论几乎是费马的天下，费马大定理魄力享誉世界，在牛顿和莱布尼茨之前，他为微积分的创立作了大量的准备工作，取得十分出色的成果，费马和帕斯卡一起分享了创立概率论的荣誉；在解析几何上，他是一位名副其实的发明者。由于他的出色工作和诸多成就，他被誉为“业余数学家之王”。

费马的《平面与立体轨迹引论》(1629—1639)和他在1636年与G.P.罗贝瓦(Roberval)等人的通信中，可以看出他在笛卡儿发表《几何学》之前，就已发现了解析几何的基本原理，他从方程出发研究它的轨迹，发现了用代数方程表示曲线的方法。《平面与立体轨迹引论》中明确指出方程可以描述曲线，并可通过方程研究推测曲线性质，得到解析几何要旨，这是他在解析几何方面的代表作。但一直到1679年才出版，那时费马已经去世14年了。

费马的解析几何思想是以古希腊阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》为出发点，他主要是对古希腊人思想的继承，因此有显著的古典色彩。他把希腊数学中使用立体图而苦心研究所发现的曲线特征，通过引进坐标，以惯常的方式译成了代数语言。这不仅使得圆锥曲线从圆锥的附属地位中解放出来，而且使得各种不同的曲线有了代数方程的一般表示方法和统一的研究手段。虽然从阿波罗尼奥斯起有不少人在引入坐标或在代数应用几何方法有所成功，但他们谁都没有把这两者结合起来，达到用代数方程表示几何曲线的程度。

费马认为给轨迹一般表示只能靠代数。他很熟悉韦达的代数工作，又受到前人用代数解决几何问题的启发，他着手解决轨迹的一般表示的问题时，就毫不犹豫地求助于代数，并沿用了韦达以字母代表数类的思想。他不仅使代数与几何结为伴侣，更重要的是他把变量思想用于数学研究，这正是他比哈里奥特等人高明的地方，也是他创立解析几何的主要思想基础。

费马的一般方法是坐标法。他把坐标平面上的点和一对未知数联系起来，然后在点运动成线的思想下，把曲线用方程表示出来。这种以代数方程表示几何曲线的方法，无疑是解析几何的精髓。费马的具体做法是：考虑任意曲线和它上面的任意点J(如图)J的位置用A, E两字母表出，其中A是从点O沿底线到Z的距离，E是从Z到J的距离。他所用的坐标就是我们所说的斜坐标，A, E相当于x, y。对于不同位置的E，其末端J, J', J'', ...就把曲线描出了。当然，在



这里，联系 A 和 E 的方程是不确定的。费马以这种思想为指导，研究了多种类型的曲线，并确定了方程，包括过原点的直线方程，任意的直线方程以及圆、椭圆、双曲线、抛物线的方程等。

费马充分注意到方程次数与曲线形状的关系，他说一个对应着 A 和 E 的方程如果是一次的，就代表直线轨迹；如果是二次的，就代表圆锥曲线。费马研究的重点是圆锥曲线，他通过自己的实践揭示了圆锥曲线的方程特征——含有未知数的二次方程。在导出方程的过程中，费马注意到了通过坐标轴的平移和旋转可以使方程简化，但他没有给出这一发现的详尽阐述。同时也能看出费马对纵坐标怎样依赖横坐标变化注意不够，对于他的方法，他也未曾从逻辑上作过清楚和全面的解释。应该说费马的解析几何是不成熟的。

费马探索了求曲线的切线，这是初步的微积分方法。他在 1629 年找到了求切线的一种方法，但直到 8 年后才发表在 1637 年的手稿《求最大值和最小值的方法》中。费马用自己的方法处理了许多几何问题，如求球的内接圆锥的最大体积、球的内接圆柱的最大面积、函数的极大值、极小值、曲线的长度等等，并在广泛的各种问题中从几何和分析的角度应用了无穷小量。他的思想与方法对后来微积分学的建立奠定了重要的基础。牛顿曾说过：“我从费马的切线作法中得到了这个方法的启示，我推广了它，把它直接地并且反过来应用于抽象的方程”。但遗憾的是，费马没有认识到求积运算是求切线的逆运算，也未曾指出微分学的基本概念——导数与微分，当然未能建立起微分学的方法。

### 三、“现代哲学之父”——笛卡儿

笛卡儿是法国杰出的哲学家、物理学家和数学家，又是生物学的奠基人，他于 1596 年 3 月 31 日生于土伦的拉开哈 (La haye in Tou raine)。幼年体弱，对周围的世界充满好奇，因此父亲说他是“小哲学家”。8 岁时入拉夫里舍 (La Flechein Anjon) 镇的一所耶稣学校上学，16 岁离开那个地方，学习了人文科学、一般哲学、物理、数学、天文学、逻辑学等，曾对诗歌产生了浓厚兴趣，他认为“诗是激情和想象力的产物”。20 岁毕业于普瓦界 (Poifiers) 大学，自 1618 年起笛卡儿进入军队，开始了长达 10 年的漫游与军旅生活。1619 年，他结识了荷兰物理学家皮尔曼 (Beeckman)，皮尔曼向他介绍了数学的若干进展，引起了他对数学的极大兴趣。在那以后的几年里，他时而在军中服役，时而在巴黎。但一直继续研究数学。1626-1628 年，笛卡儿居留法国，结交了许多科学界的朋友。1628 年，笛卡儿移居荷兰，一直住了 20 年之久。这期间，他潜心钻研哲学和数学，撰写出许多著作。其中：1628-1630 年间，他撰写了第一篇方法论的论文：《指导思维的法则》。1637 年，笛卡儿发表了《方法论》，阐述了他的机械论的哲学观点和基本研究方法，成为他的重要哲学成果之一。作为《方法论》的三个附录《折光》、《气象》和《几何学》是笛卡儿最重要的科学论著。1638-1640 年间，笛卡儿进一步探究其学说的哲学方法。1644 年，他出版了《哲学原理》，将哲学和科学理论完善化、系统化，并试图将一切自然现象纳入一种符合逻辑的机械论模式。尽管笛卡儿机械论有其局限性，但他建立了用力学概念解释一切物理和生理现象，同时将力学与几何相联系的研究纲领，这种借助某种力学模型研究自然的方式，体现了现代科学的精神。由于他的哲学创造，笛卡儿被认为是欧洲近代哲学的开拓者之一，黑格尔称他为“现代哲学之父”。1649 年，笛卡儿应邀到瑞典任克里斯蒂娜 (Christina 1628—1689) 女皇的教师，1650 年 2 月 11 日在斯德哥尔摩死于肺炎。

笛卡儿创立了解析几何学，并提出代数基本定理和关于代数方程根的符号的“笛卡儿符号法则”等，是其最重要的数学贡献。笛卡儿接受并继承了文艺复兴以来新的数学观，特别是他继承和发展了韦达等人的先进数学思想，充分看到了代数思想的重要性和普遍性，为寻求一种能把代数应用到几何中去的新方法思考了二十年。笛卡儿认为，欧几里得几何过分强调证明的技巧性，过分依赖于图形，不利于提高人们的想象力，而代数又完全受法则和公式的约束，影响人们思想的灵活性，他主张把代数和几何结合起来，各取其长，用代数方法去

研究几何问题。1619 年他悟出新方法的关键，在于借助坐标系建立起平面上的点与数之间的对应关系，由此可用方程等表示曲线，1637 年，他的《几何学》作为《方法论》一书的附录出版，在这个附录中，他明确提出了坐标几何的思想，并用于解决许多几何问题，此书的问世标志着解析几何的诞生。总之，笛卡儿思想的核心是要建立一种普遍的数学，使算术、代数和几何统一起来。在这种思想的指引下，他是这样进行研究工作的：

(1) 引入坐标观念：笛卡儿受到法国人奥雷其姆 (Nicole Oresme 1323—1382) 的思想的影响。从自古已知的正确天文和地理的经纬制度出发，引入了用数对表示点的坐标，他给出的  $(x, y)$  相当于一种坐标系的坐标。指出平面上的点和实数对  $(x, y)$  的对应关系。且认为“静”的曲线是点运动的轨迹。

(2) “变量”的数学思想，利用坐标法提出用曲线表示方程 思想，考虑二元方程  $F(x, y) = 0$  的性质，满足这方程的  $x, y$  值无穷多，当  $x$  变化时， $y$  值也跟着变化。 $x, y$  不同的数值所确定的平面上许多不同点，便构成了一条曲线。这样，一个方程就可以通过几何直观和方法来处理。

(3) 用代数方法改造传统几何学，作为他的方法论的例子，利用代数方法，提出了用方程表示曲线的思想，具有某种性质点，它们之间有某种关系，“这种关系可用一个方程表示”。进而建立了利用代数议程来表示几何曲线的更一般的方法。

综上，就是笛卡儿解析几何的基本思想。

笛卡儿在其名著《几何学》的第二卷中，给出了解决公元 3 世纪希腊数学评注家帕普斯问题的方法，从而阐述了通过坐标建立曲线和方程联系的思想。

除数学外，笛卡儿在物理学和生物学中也有诸多建树。他试图从根本上给科学建立牢固的基础。在建立自己的知识体系时，笛卡儿提出了以数学为楷模的理性演绎方法和以理性判断为最高准则的实验方法。

笛卡儿和费马解析几何工作的比较：

笛卡儿和费马分享创立解析几何的殊荣。他们各自独立地创立了解析几何，二人都认识到掌握研究科学的一般方法的重要性，他们认为：在一切领域，建立真理的方法就是数学方法。由于实践的需要和对方法论的兴趣，推动了费马和笛卡儿对坐标几何的研究。在解析几何的观点（坐标观点）和用方程表示曲线的方法方面，二人的观点基本相同，但是在创立解析几何的思想上，特别是对待传统数学态度上，他们有着本质的不同。

首先，费马和笛卡儿研究解析几何的方法是大不相同的。笛卡儿从研究轨迹开始，然后找它对应的方程，试图将代数、几何、算术统一起来，建立一种普遍的数学。费马却从方程出发，借助于代数然后来研究轨迹，这正是解析几何基本原则的两个相反的方面，各有侧重，前者是从几何到代数，后者则是从代数到几何。

其次，从历史的发展看，笛卡儿更具有突破性。费马的工作主要体现出对古希腊几何学的继承，认为他的思想是希腊数学思想的继续，他的工作仅限一般技术性的工作，没能完全克服阿波罗尼奥斯静态地研究几何曲线的影响，他的解析几何的研究工作，只不过是阿波罗尼奥斯的著作的另一种表述罢了，费马的解析几何思想尚不完善，他建立的坐标还不完善，他的解析几何只是几何学的一种方法。笛卡儿则从批判希腊传统出发，主张同这种传统决裂。笛卡儿认为他自己是在改变古代的方法。因此，笛卡儿的工作相比于费马的解析几何有一定的进展，主要表现在：

1、几何问题的代数化。证明了几何问题可以归结为代数形式的问题，因此，在求解几何问题时，可以运用代数的全部方法。由于笛卡儿采用代数语言表示几何性质，就使他解决了许多在传统几何中困难很大的几何定理的简单证明，为几何学的发展注入了新的活力。

2、他将“变量”引入数学，从而完成了数学史上一项划时代的变革。改变了数学的面貌。恩格斯指出：“数学中转折点是笛卡儿变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，

辩证法进入数学，有了变数，微积分也就立刻成为必要的了……”。

总之，解析几何的创立是笛卡儿最丰富、最有效的辩证法思想和数学方法的结晶。笛卡儿的贡献是伟大的。他和费马虽然共享创立解析几何的荣誉，但是，解析几何作为一门学科，无论从内容还是方法上都不够完善，这门学科达到今天课本中的形式，是许多数学家经过一、二百年的时间，在各个方面作了大量的修改和补充，才使之逐步成熟与完善。

笛卡儿、费马创立的坐标系虽然都很不完善，但是其意义却是划时代的，它使数与形能统一起来研究。此后人们获得了沟通几何与代数的新思路，新方法。1655年英国数学家沃利斯首先有意识地引进负的纵、横坐标，改进了笛卡儿、费马的坐标系，并且得到完整的圆锥曲线的方程，用这些方程直接推导出圆锥曲线的几何性质，充分显示出坐标系奇妙的作用，也大大有助于笛卡儿、费马的解析几何思想的传播。

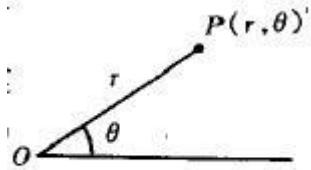


图 2

牛顿在他的老师沃利斯的影响下，多次运用坐标系，按曲线的方程来描述曲线，而且提出了建立新的坐标系的创见：如图2，用一个固定的点O和通过它的一条射线作为基准，用r和θ来确定P点的位置，只需用 $x=r\cos\theta$ ,  $y=r\sin\theta$ 就可以将这种坐标系中的坐标转换为直角坐标系中的坐标来表示同一点在平面上的位置。这就是现代所称的极坐标系。牛顿的这项工作很晚才为世人所知，而詹姆士·贝努利于1691年最先发表了上述有关极坐标系的文章，所以一般人们都称贝努利为极坐标系的发明者。