

非欧几何

在群思想引入前，代数学主要是初等代数学；指的是 19-世纪以前的方程理论。群概念引进后，代数学的研究对象渐渐转向代数系统结构的研究，即变成了抽象代数学。这一过程被称为代数学的解放。

19 世纪，随着数学的迅速发展，产生了新的几何学——非欧几何学。这是几何学的一次变革，标志着区欧几里得几何一天下局面的结束，是数学史上的重大成就之一。

一、非欧几何产生的历史

非欧几何学是一门不同于欧几里得几何体系的数学分支体系。一般来讲，他有广义、狭义、通常意义这三个方面的不同含义。所谓广义的非欧几何泛指一切和欧几里的几何学不同的几何学，狭义的非欧几何只是指罗式几何来说的，至于通常意义的非欧几何，就是指罗式几何和黎曼几何这两种几何。它们与欧几里得几何最主要的区别在于公理体系中采用了不同的平行公理。



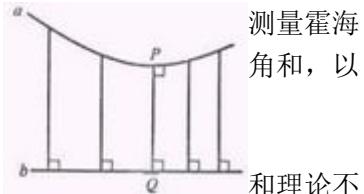
罗巴切夫斯基。H. 礼

在数学史上，长期以来，人们对空间的认识只能是欧几里得体系下的绝对“平直”的空间，这种“平直”，主要体现在平行公设中，即在平面上过直线外一点，只能作一条直线与它不相交，这种不相交的直线称为平行线；“平直”空间理论还认为三角形三内角之和为 180° ，它的曲率等于零。17-18 世纪的牛顿力学，就是建立在这种空间观念上。这种空间观直到 18 世纪才得以改变。在航海中，人们发现地面是弯曲的，接近球面。19 世纪，随着交通运输业的发展，促使人们对曲面的深入研究。人们还通过天文观测来考察认识了遥远空间的特性。这样，由于生产和社会实践的发展和需要，人们对空间的绝对“平直”发生了怀疑，逐渐形成了新的空间概念。

非欧几何产生的历史导源于欧几里得的《几何原本》提出的第五公设。欧几里得《几何原本》提出的第五公设(即平行公设)内容复杂，陈述累赘，并不自明。因此，它能否作为公设，引起了古代学者们的怀疑。从古希腊时代到 18 世纪，人们通过不同的途径和方法对这一问题进行了大量的研究工作，其中萨克里 (Saccheri, 1667—1733) 和兰勃特 (Lambert, 1728-1777) 等人考虑了两个可能的与平行公设相反的假设，试图证明出平行公设，但是他们的努力均归于失败。然而，在这些失败中却引出了一串与第五公设相等价的新命题和定理，即非欧几何的公理和定理，它预示了一种新的几何体系可能产生。

高斯 (Gauss, 1777—1855) 在 1792 年，也就是他 15 岁时，已经有了非欧几何的思想。高斯认为，欧几里得几何中的平行公理只对欧氏几何才是有效的。如果把它修改一下，变在成“过直线外一点可以作多于一条与该直线平行的线”，则完全可以推出另一套几何学来。1799 年，高斯在给非欧几何的另一创立者，匈牙利数学家鲍耶 (1802—1860) 的父亲的信中，再次强调了平行公理无法在欧氏几何中加以证明的意见，并开始重视开发新几何学的内容。从 1813 年起，高斯先后称他所设想的几何学为“反欧几里得几何”、“星际几何”、“非欧几里得几何”等。高斯不仅确信新几何无逻辑矛盾，而且还似乎相

信它是可用的。后来，在汉诺威大地测量时，高斯试图通过哈根——布洛肯——英泽尔堡三个山头所构成的三角形的内验证非欧几何的正确性，但未成功。



测量霍海
角和，以

尽管高斯关于非欧几何的思想十分卓越，但是由于怕新
不会被人理解，而会被嘲笑，因此他一辈子都没有公开发表的勇气。不仅如此，甚至于在
别人已经提出这个问题的时候，他也从来没有公开地表示支持。但是他的知己朋友们知道
他的研究情况。他去世后，他的非欧几何的思想才从他与一些数学家的通信和他的遗稿中
被发现。数学家施魏卡特就曾称赞高斯是非欧几何学的“伟大创始者”。

几乎在高斯创立非欧几何学的同时，匈牙利数学家鲍耶·亚诺什 (Janos Bolyai, 1802–1860) 也发现了第五公设不可证明和非欧几何学的存在。亚诺什的父亲鲍
耶·法尔卡什 (Farkas Bolyai, 1775–1856) 是高斯大学时的同学，终生从事第五公设
的证明，但他的工作并没有取得突出的成就，而且思想保守。1823年，亚诺什写了一篇
《空间的绝对几何学》的论文，这篇非欧几何思想的论文却遭到父亲的强烈反对，认为儿子
触犯“权威”，不愿发表儿子的论文。亚诺什根本不听从父亲的劝阻，坚持为发展新的
几何学而辛勤工作。1823年11月23日给父亲的信中说：“我已经得到如此奇异的发现，
连我自己也为之惊讶不止……，我已经从鸟有创造了整个世界。”1825年，亚诺什已经
基本上完成了非欧几何学，请求父亲帮助出版，却遭到了父亲的拒绝。后来，父子俩由于
学术上的分歧，导致他们感情上的父子关系破裂。亚诺什被迫背井离乡，搬到偏远的农村
去住，由于贫困交加，妻子也离他而去，结果孑然一身，离开了人世。1832年他的关于新
几何的著作以附录的形式发表在他父亲的一本书的后边，根据“附录”的拉丁文字，亚诺
什的工作在数学文献上获得“亚编的克斯”的称号。

第五公设问题的彻底解决者是19世纪年轻的俄国数学家罗巴切夫斯基 (1792–1856)。他1810年获得喀山大学硕士学位。1816年24岁就成为数学教授。他在数学研究中产生了与前人完全不同的信念：首先，他认为第五公设不能以其余的公理作为定理来证明；其次，除掉第五公设成立的欧氏几何之外，还可能有第五公设不成立的新几何系统存在。于是，他在剔除第五公设而保留欧氏几何其余公理的前提下，引进与第五公设相反的公理，从而构造了一个全新的几何系统，它与欧氏几何系统相并列。后来人们又证明了这两个部分地相矛盾的几何系统竟是相对相容的，即假定其中之一无矛盾，则另一个必定无矛盾，这样以来，只要这两个系统是无矛盾的，第五公设与欧氏系统的其余公理就必定独立无关。1826年2月23日，罗巴切夫斯基于喀山大学物理数学系学术会议上宣读了他的第一篇关于非欧几何的论文《几何学原理及平行线定理严格证明的摘要》。这篇首创性论文的问世，标志着非欧几何的诞生，这一天就被认为是“非欧几何学的诞生日”。然而，这一重大成果刚一公诸于世，就遭到正统数学家的冷漠和反对。罗巴切夫斯基的首创性论文没能引起学术界的注意和重视，论文本身也似石沉大海，不知被遗弃何处。但他并没有因此灰心丧气，而是顽强地继续独自探索新几何的奥秘。1829年，他又撰写出一篇题为《几何学原理》的论文。这篇论文重现了第一篇论文的基本思想，并且有所补充和发展。罗巴切夫斯基开创了数学的一个新领域，但他的创造性工作在生前始终没能得到学术界的重视和承认。就在他去世的前两年，俄国著名数学家布尼雅可夫斯基 (1804–1889) 还在其所著的《平行线》一书中对罗巴切夫斯基发难，他试图通过论述非欧几何与经验认识的不一致性，来否定非欧几何的真实性。英国著名数学家莫尔甘 (Morgan, 1806–1871) 对非欧几何的抗拒心里表现得就更加明显了，他甚至在没有亲自研读非欧几何著作的情况下就武断

地说：“我认为，任何时候也不会存在与欧几里得几何本质上不同的另外一种几何。”莫尔甘的话代表了当时学术界对非欧几何的普遍态度。

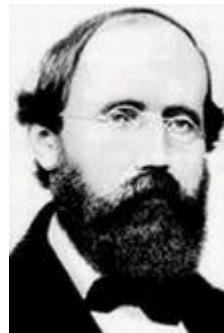
在创立和发展非欧几何的艰难历程上，罗巴切夫斯基始终没能遇到他的公开支持者，就连非欧几何的另一位发现者德国的高斯也不肯公开支持他的工作。

直到 1868 年，意大利数学家贝特拉米 (Beltrami, 1835—1899) 发表了一篇著名论文《非欧几何解释的尝试》，证明非欧几何可以在欧几里得空间的曲面（例如拟球曲面）上实现。这就是说，非欧几何命题可以“翻译”成相应的欧几里得几何命题，如果欧几里得几何没有矛盾，非欧几何也就自然没有矛盾。人们既然承认欧几里得几何是没有矛盾的，所以也就自然承认非欧几何没有矛盾了。直到这时，长期无人问津的非欧几何才开始获得学术界的普遍注意和深入研究，罗巴切夫斯基的独创性研究也就由此得到学术界的高度评价和一致赞美，他本人则被人们赞誉为“几何学中的哥白尼”。现在人们就用罗巴切夫斯基的名字命名了这一新的几何学，并把一切不同于欧氏几何公理系统的几何系统统称为非欧几何。这种几何学被称为罗巴切夫斯基几何，简称罗氏几何。这是第一个被提出的“非欧几何学”。

高斯、亚诺什、罗巴切夫斯基他们各自独立的工作，因此说非欧几何的问世当归功于他们三人，只是罗巴切夫斯基发表在先，所以命名罗巴切夫斯基几何，遗憾的是，他们三人在生前都没能亲眼看到罗氏几何被社会所公认。罗氏几何直到 1871 年即罗巴切夫斯基死后 15 年才获得公认。

德国数学家黎曼是非欧几何的创始人之一。他开创的高维抽象几何的研究，处理几何问题的方法和手段是几何史上一场深刻的革命，他建立了一种全新的后来以其名字命名的几何体系，对现代几何乃至数学和科学各分支的发展都产生了巨大的影响。

1854 年黎曼提出了一种新的几何学。在这种几何学中，黎曼把欧氏几何的第五公设改为“过平面上已知直线外一点没有直线与原直线平行”。由此可推出“三角形内角和大于 π ”的命题，更重要的是他把欧几里得三维空间推广到 n 维空间，从而得到一种新的几何学——黎曼非欧几何学。在黎曼看来，有三种不同的几何学。它们的差别在于通过给定一点做关于定直线所作平行线的条数。如果只能作一条平行线，即为熟知的欧几里得几何学；如果一条都不能作，则为椭圆几何学；如果存在一组平行线，就得到第三种几何学，即罗巴切夫斯基几何学。黎曼的研究导致另一种非欧几何——椭圆几何学的诞生。黎曼因此继罗巴切夫斯基以后发展了空间的理论，使得一千多年来关于欧几里得平行公理的讨论宣告结束。他断言，客观空间是一种特殊的流形，预见具有某种特定性质的流形的存在性。这些逐渐被后人一一予以证实。



从研究方法上，黎曼摆脱高斯等前人把几何对象局限在三维欧几里得空间的曲线和曲面的束缚，从维度出发，建立了更一般的抽象几何空间。黎曼引入流形和微分流形的概念，把维空间称为一个流形，开展对维流形内蕴性质的研究。黎曼主要研究几何空间的局部性质，他采用的是微分几何的途径，这同在欧几里得几何中或者在高斯、亚诺什和罗巴切夫斯基的非欧几何中把空间作为一个整体进行考虑是对立的。由于黎曼考虑的对象是任意维数的几何空间，对复杂的客观空间有更深层的实用价值。所以在高维几何中，由于多变量微分的复杂性，黎曼采取了一些异于前人的手段使表述更简洁，并最终导致张量、外微分及联络等现代几何工具的诞生。黎曼的工作远远超过前人，他的著作对 19 世纪下半叶和 20 世纪的数学发展都产生了重大的影响，而且他的研究成果为 50 年后爱因斯坦的广义相对论提供了数学框架。

二、非欧几何学的意义

非欧几何的建立是人们对空间观念认识的一次飞跃。从根本上革新和拓广了人们对几何学观念的认识。它所产生的一个“最重要的影响是迫使数学家们从根本上改变了对数学性质的理解”。历史学家通过数学这面镜子，不仅看到了数学的成就与应用，也看到了数学的发展如何教育人们去进行抽象的推理、发扬理性主义的探索精神、激发人们对理想和美的追求。

非欧几何的建立导致了人们对几何学基础的深入研究。它开拓了几何学原理的新领域，扩大了几何学研究的对象和范围，并引起新几何学公理系统的纵深研究，大大拓展了数学公理化方法的意义和应用空间。

非欧几何的建立不仅仅推广了几何学的概念，而且对于 20 世纪初物理学中发生的关于空间和时间的物理观念的改革起了重大的推动作用。爱因斯坦在创建广义相对论的过程中，因他缺乏必要的数学工具，长期未能取得根本性的突破，当他的同学、好友，德国数学家格拍斯曼帮助他掌握了黎曼几何和张量分析之后，才使爱因斯坦打开了广义相对论的大门，完成了物理学的一场革命，宣告核时代的来临。现在，黎曼几何已成为现代理论物理必备的数学基础。爱因斯坦深有体会地说：“理论物理学家越来越不得不服从于纯数学的形式的支配。”爱因斯坦还认为理论物理的“创造性原则寓于数学之中。”黎曼的数学

思想精辟独特。对于他的贡献，人们是这样评价的：“黎曼把数学向前推进了几代人的时间”。

非欧几何学在数学的一些分支中在着重要的应用。非欧几何学互相渗透，促进各自的发展，例如，黎曼几何不仅是微分几何的基础，也应用到微分方程，变分法和复变函数论等方面。正如希尔伯特所说的：“19世纪最有启发性、最重要的数学成就是非欧几何学的发现”。